

# Un couplage Boussinesq - équation intégrale appliqué à l'interaction de la houle avec des obstacles bidimensionnels

M. HAMIDOU<sup>a</sup>, B. MOLIN<sup>b</sup>, O. KIMMOUN<sup>b</sup>, M. KADRI<sup>c</sup>, Y. LIU<sup>b</sup>

*a. Département d'Hydraulique, Université de M'Sila, Algérie*

*b. École centrale de Marseille & IRPHE, 13 451 Marseille cedex 20*

*c. Département de Génie Civil, Université de Boumerdes, Algérie*

## Résumé :

*On présente ici une méthode de couplage entre les équations de Boussinesq "étendues", suivant la formulation potentielle de Jamois [1], et la méthode d'équation intégrale. La mise en œuvre est réalisée dans le cas d'un bassin à houle bidimensionnel. Des validations sont présentées.*

## Abstract :

*A coupling method is proposed, between the extended Boussinesq equations as formulated by Jamois [1], in potential form, and the integral equation method. The implementation is carried out in the case of a two-dimensional wave-tank. Validations are presented.*

**Mots clefs :** Équations de Boussinesq, équation intégrale, bassin à houle numérique.

## 1 Introduction

Les récentes années ont vu de nombreux développements apportés aux équations dites de Boussinesq, dont il existe aujourd'hui diverses formulations. On fait ici référence aux travaux des chercheurs du DTU (*Technical University of Denmark*), en particulier Madsen, Fuhrman et Bingham (voir par exemple Madsen *et al.* [2] ou Fuhrman & Bingham [3]). Les modèles qu'ils ont développés permettent de simuler la propagation d'états de mer fortement non linéaires sur des bathymétries lentement variables, avec de bonnes propriétés dispersives jusqu'à des valeurs élevées de la profondeur adimensionnelle  $kh$  ( $k$  étant le nombre d'onde et  $h$  la profondeur). Des grands domaines (plusieurs dizaines de longueurs d'onde en  $x$  et en  $y$ ) peuvent ainsi être couverts pour des coûts de calcul raisonnables.

Les modèles de Boussinesq procèdent d'un développement du champ de vitesses (ou du potentiel des vitesses en formulation potentielle) sous la forme de polynômes par rapport à la cote verticale  $z$  (ou  $z - \hat{z}$ , où  $\hat{z}$  est une profondeur de référence), tronqués à un certain ordre. Leur application à l'interaction de la houle avec des structures marines est alors restreinte à des obstacles immobiles à parois verticales. C'est ainsi que Jamois [1] présente des simulations numériques de l'interaction non-linéaire de houles régulières avec des plaques verticales qui se comparent avantageusement à des résultats d'essais en bassin réalisés dans le BGO-First de la Seyne sur mer (voir aussi Jamois *et al.* [4]). En particulier le phénomène dit de run-up qui apparaît au centre de la plaque est très bien reproduit. Ce run-up est dû aux interactions "tertiaires" (de troisième ordre), entre la houle incidente et la houle réfléchi par la plaque, qui prennent place sur un grand domaine en amont de la plaque (voir Molin *et al.* [5]).

Une voie pour pouvoir traiter le cas d'obstacles de forme quelconque et de structures flottantes est de partitionner le domaine fluide en deux sous-domaines : un sous-domaine extérieur traité par un modèle Boussinesq et un sous-domaine proche traité par une autre méthode. Nous avons choisi ici une méthode d'équation intégrale, les avantages étant que la même théorie potentielle est appliquée dans les deux sous-domaines, et que les équations non-linéaires de surface libre sont écrites sous la même forme dite de Zakharov [6]. Le problème ouvert est alors la méthode de couplage entre les deux modèles à leur frontière commune.

On propose ici une méthode qui permet d'assurer un couplage fort entre les deux modèles. La mise en œuvre et les validations sont réalisées en deux dimensions.

## 2 Théorie

On utilise un système de coordonnées rectangulaires  $Oxz$  tel que l'axe  $x$  coïncide avec la surface libre au repos et que l'axe  $z$  soit vertical ascendant. On se place dans le cadre de la théorie potentielle : le fluide est supposé parfait, isovolume, et l'écoulement irrotationnel. Soit  $\Phi(x, z, t)$  le potentiel des vitesses et  $\eta(x, t)$  l'élévation de surface libre. On note  $\tilde{\Phi}(x, t)$  la restriction du potentiel à la surface libre :  $\tilde{\Phi}(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$ .

Suivant Zakharov [6] on écrit les conditions, dynamique et cinématique, de surface libre sous la forme :

$$\tilde{\Phi}_t = -g\eta + \frac{1}{2}\tilde{W}^2(1 + \eta_x^2) - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_x^2 \quad (1)$$

$$\eta_t = \tilde{W}(1 + \eta_x^2) - \eta_x \tilde{\Phi}_x \quad (2)$$

où  $\tilde{W}(x, t) = \Phi_z(x, \eta(x, t), t)$  est la vitesse verticale à la surface libre.

Outre ces conditions le potentiel vérifie la condition de Laplace  $\Delta\Phi = 0$  dans le domaine fluide et la condition de Neumann homogène  $\partial\Phi/\partial n = 0$  sur le fond de cote  $z = -h(x)$  et sur les obstacles éventuels, ici supposés fixes. Par autre souci de simplification on supposera la profondeur constante  $h(x) = h_i$  dans le ou les sous-domaines Boussinesq.

Les équations (1) et (2) permettent d'avancer en temps le potentiel à la surface libre  $\tilde{\Phi}$  et l'élévation  $\eta$  sous condition que la vitesse verticale  $\tilde{W}$  soit déterminée.

## 2.1 Modèle Boussinesq

On suit la formulation de Jamois [1]. Cette formulation assure de bonnes propriétés dispersives jusqu'à  $kh \simeq 10$ , rend compte des effets non-linéaires du troisième ordre jusqu'à  $kh \simeq 8$ , tandis que les profils de vitesse au sein du fluide sont correctement reproduits jusqu'à  $kh \simeq 4$ .

Potentiel des vitesses  $\Phi(x, z, t)$  et vitesse verticale  $W(x, z, t)$  sont développés sous la forme :

$$\Phi(x, z, t) = \hat{\Phi}^* + (z - \hat{z})\hat{W}^* - \left(\frac{1}{2}(z - \hat{z})^2 - \frac{\hat{z}^2}{10}\right)\hat{\Phi}_{xx}^* - \left(\frac{1}{6}(z - \hat{z})^3 - \frac{\hat{z}^2}{10}(z - \hat{z})\right)\hat{W}_{xx}^* \quad (3)$$

$$W(x, z, t) = \hat{W}^* - (z - \hat{z})\hat{\Phi}_{xx}^* - \left(\frac{1}{2}(z - \hat{z})^2 - \frac{\hat{z}^2}{10}\right)\hat{W}_{xx}^* + \left(\frac{1}{6}(z - \hat{z})^3 - \frac{\hat{z}^2}{10}(z - \hat{z})\right)\hat{\Phi}_{xxxx}^* \quad (4)$$

La cote de référence  $\hat{z}$  est prise classiquement à mi-profondeur  $\hat{z} = -h/2$ . Les inconnues  $\hat{\Phi}^*(x, t)$  et  $\hat{W}^*(x, t)$  sont des variables utilitaires, reliées linéairement à  $\hat{\Phi}(x, t) = \Phi(x, \hat{z}, t)$  et  $\hat{W}(x, t) = W(x, \hat{z}, t)$ . Cette transformation permet d'améliorer les propriétés dispersives du modèle (voir Jamois [1]).

La condition de glissement sur le fond  $W(x, -h, t) = 0$  et l'identification de  $\Phi(x, \eta, t)$  avec  $\tilde{\Phi}(x, t)$  à la surface libre fournissent deux conditions par point de calcul  $x$ . Pratiquement les dérivées en  $x$  sont déterminées par différences finies, à partir des valeurs prises en quatre points voisins (deux de chaque côté). Cela signifie que deux points additionnels doivent être introduits à l'intérieur du domaine E.I. (Équation Intégrale), soient  $A$  et  $B$ , où les valeurs  $\hat{\Phi}_A^*$ ,  $\hat{\Phi}_B^*$ ,  $\hat{W}_A^*$ ,  $\hat{W}_B^*$  sont requises (voir figure 1).

## 2.2 Équation intégrale

La seconde identité de Green

$$\alpha(P)\Phi(P) + \int_{\Gamma} \Phi(Q) \nabla_Q G(P, Q) \cdot \vec{n}_Q d\Gamma_Q = \int_{\Gamma} G(P, Q) \nabla_Q \Phi(Q) \cdot \vec{n}_Q d\Gamma_Q \quad (5)$$

permet de relier valeurs du potentiel et de sa dérivée normale le long du contour  $\Gamma$ . La fonction de Green  $G(P, Q)$  est ici simplement  $\ln(PQ)$ .  $\alpha(P)$  est l'angle entre les deux tangentes au contour en  $P$ , le vecteur normal  $\vec{n}$  est dirigé vers l'extérieur du domaine. Sur certaines parties du contour  $\Phi$  est connu (la surface libre), sur d'autres c'est sa dérivée normale (le fond et les frontières rigides). La résolution de l'équation intégrale permet d'obtenir la vitesse normale à la surface libre. De nombreux "bassins à houle numérique" sont basés sur cette technique (voir, par exemple, Cointe [7]). La frontière du domaine étant discrétisée en  $N$  segments, des approximations linéaires sont utilisées, l'intégration des termes sur chaque élément étant faite numériquement par quadrature de Gauss [8]. A l'intersection du corps avec la surface libre, du fait de la discontinuité de la dérivée normale du potentiel des deux côtés de l'intersection, l'approche dite du "double nœud" est utilisée.

## 2.3 Couplage entre les deux modèles

Suivant la figure 1, on place l'origine du repère à la frontière entre les deux domaines. Il s'agit de raccorder, sur le segment vertical  $x = 0, -h \leq z \leq 0$ , les potentiels et les vitesses horizontales. Ce faisant, il faut garder à l'esprit que la représentation du potentiel dans le domaine Boussinesq n'est qu'une approximation, sous la forme d'un développement polynômial tronqué à l'ordre trois. On va donc exprimer, dans le domaine E.I., à la frontière, le potentiel et la vitesse horizontale suivant la même forme polynômiale que dans le domaine Boussinesq. Le raccordement se fera alors en identifiant les coefficients des monômes en  $(z - \hat{z})^i$ .

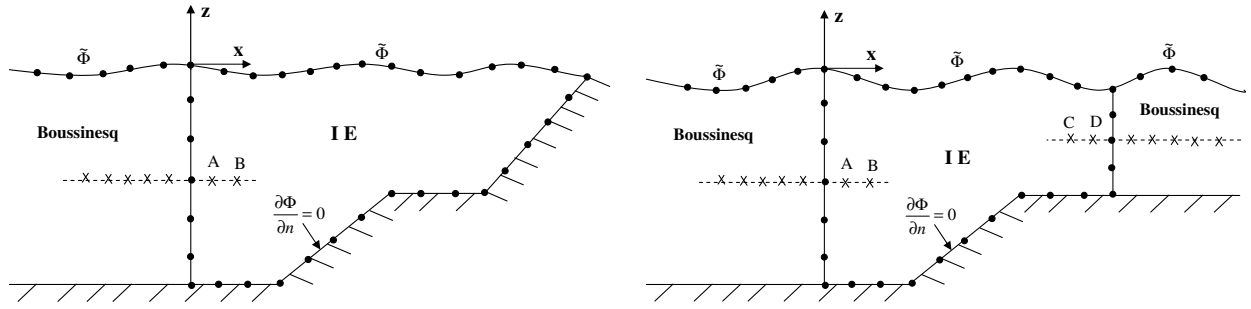


FIG. 1 – Géométrie. Deux domaines (gauche) ou trois domaines (droite).

Dans le domaine E.I., le potentiel des vitesses est écrit sous la forme

$$\Phi(x, z, t) = \varphi_P(x, z, t) + \sum_{i=1}^4 A_i \varphi_i(x, z, t) \quad (6)$$

où  $\varphi_P$  est solution du problème aux limites

$$\Delta \varphi_P = 0 \quad \text{dans le domaine E.I.} \quad (7)$$

$$\varphi_P = \tilde{\Phi} \quad \text{à la surface libre} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_P}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi_P}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les frontières solides} \quad (10)$$

et où les potentiels  $\varphi_i$  sont les solutions de

$$\Delta \varphi_i = 0 \quad \text{dans le domaine E.I.} \quad (11)$$

$$\varphi_i = 0 \quad \text{à la surface libre} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = (z - \hat{z})^{i-1} \quad x = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les frontières solides} \quad (14)$$

Les coefficients  $A_i$  sont indéterminés à ce stade. Quelles que soient leurs valeurs, le potentiel  $\Phi$  vérifie la condition de surface libre et les conditions de glissement aux frontières solides.

Les 5 problèmes aux limites écrits ci-dessus étant résolus, et les potentiels  $\varphi_P$ ,  $\varphi_i$ , obtenus dans le domaine E.I., leur trace en  $x = 0$  est développée sous la forme polynômiale :

$$\varphi_P(0, z, t) \simeq \sum_{j=1}^4 \alpha_{Pj} (z - \hat{z})^{j-1} \quad (15)$$

$$\varphi_i(0, z, t) \simeq \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} (z - \hat{z})^{j-1} \quad (16)$$

Les coefficients  $\alpha_{Pj}$ ,  $\alpha_{ij}$  sont déterminés en minimisant l'écart entre les deux membres.

On a donc écrit, d'une part, la vitesse horizontale  $\Phi_x(0, z, t)$  sous la forme

$$\Phi_x(0, z, t) = \sum_{i=1}^4 A_i (z - \hat{z})^{i-1} \quad (17)$$

et, d'autre part, le potentiel  $\Phi(0, z, t)$  sous la forme

$$\Phi(0, z, t) = \sum_{i=1}^4 (z - \hat{z})^{i-1} \left( \alpha_{Pi} + \sum_{j=1}^4 \alpha_{ji} A_j \right) \quad (18)$$

On procède maintenant à l'identification avec les développements polynômiaux du potentiel et de la vitesse horizontale dans le domaine Boussinesq. Ceci fournit 8 équations pour 4 coefficients inconnus  $A_i$ . Introduisant les 4 autres inconnues  $\widehat{\Phi}_A^*$ ,  $\widehat{\Phi}_B^*$ ,  $\widehat{W}_A^*$ ,  $\widehat{W}_B^*$  à partir desquelles sont exprimées les dérivées en  $x$  de  $\widehat{\Phi}^*$  et  $\widehat{W}^*$ , on obtient un nombre d'équations égal au nombre d'inconnues, ce qui permet la résolution dans le domaine Boussinesq. La détermination des coefficients  $A_i$  permet d'exprimer la vitesse normale à la surface libre dans le domaine E.I. La vitesse tangentielle s'obtient par différences finies.

On peut alors avancer en temps  $\widetilde{\Phi}$  et  $\eta$ , ici par un schéma Runge-Kutta d'ordre 4.

## 2.4 Trois domaines

La méthode de couplage exposée ci-dessus a été étendue au cas où le domaine E.I. est inséré entre deux domaines Boussinesq, de profondeurs  $h_1$  et  $h_2$ . Cette extension est directe : dans le domaine E.I., s'étendant de  $x = 0$  à  $x = l$ , le potentiel est maintenant écrit sous la forme :

$$\Phi(x, z, t) = \varphi_P(x, z, t) + \sum_{i=1}^8 A_i \varphi_i(x, z, t) \quad (19)$$

où  $\varphi_P$  est solution du problème aux limites

$$\Delta \varphi_P = 0 \quad \text{dans le domaine E.I.} \quad (20)$$

$$\varphi_P = \widetilde{\Phi} \quad \text{à la surface libre} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \varphi_P}{\partial x} = 0 \quad x = 0, x = l \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi_P}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les frontières solides} \quad (23)$$

et où les potentiels  $\varphi_i$  vérifient, comme dans le cas précédent, la condition de Laplace, la condition de Dirichlet homogène à la surface libre, la condition de Neumann sur le fond et

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = (z - \widehat{z}_1)^{i-1} \quad x = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0 \quad x = l \quad (25)$$

pour  $i = 1, 4$  et

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = (z - \widehat{z}_2)^{i-5} \quad x = l \quad (27)$$

pour  $i = 5, 8$ .

La suite est identique au cas précédent.

On peut ainsi simuler un bassin à houle avec un obstacle et/ou des accidents bathymétriques localisés entre deux abscisses. En entrée la houle régulière est imposée progressivement sur une zone longue d'une longueur d'onde, à partir du modèle de fonction de courant de Fenton [9]. Des zones de relaxation sont mises en place en entrée et en sortie du domaine de calcul, de manière à absorber les ondes transmises et réfléchies par les obstacles.

## 3 Applications

### 3.1 Progression de la houle régulière en fond plat

On considère un domaine long de 8 longueurs d'onde  $L = 1.326$  m, partitionné en trois sous-domaines. Le pas d'espace est pris égal à un quarantième de longueur d'onde. Le sous-domaine amont fait 4 longueurs d'onde, le sous-domaine intermédiaire une longueur d'onde et le sous-domaine aval 3 longueurs d'onde. Les limites des différents sous-domaines sont marquées par des traits verticaux sur la figure 2.

Les simulations numériques sont réalisées pour une profondeur  $h = 42$  cm telle que  $kh = 2$  et une cambrure  $2A/L$  égale à 0.06. La période est alors 2.014 s. Cent pas de temps sont pris par période. Les calculs sont effectués de deux manières, avec les équations de Boussinesq sur la totalité du domaine, et avec la méthode de couplage, le domaine intermédiaire étant traité via l'équation intégrale.

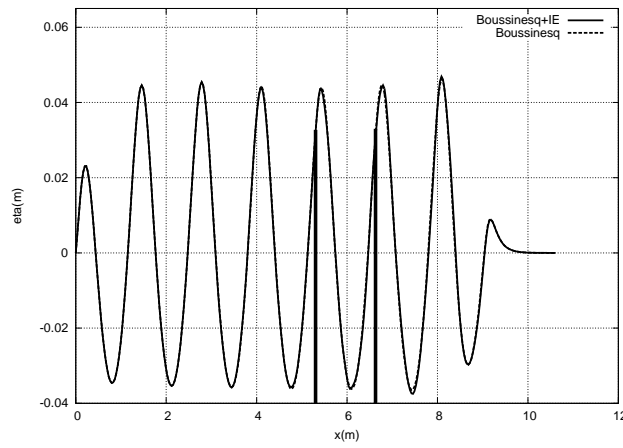


FIG. 2 – Élévation de surface libre le long du bassin après 15 périodes.

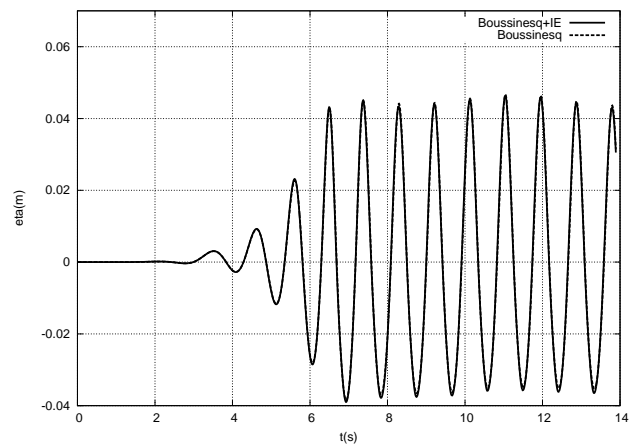
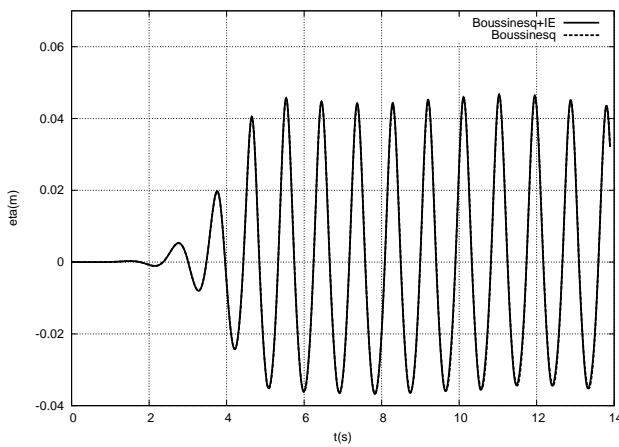


FIG. 3 – Élévations de surface libre au cours du temps aux deux points de raccordement.

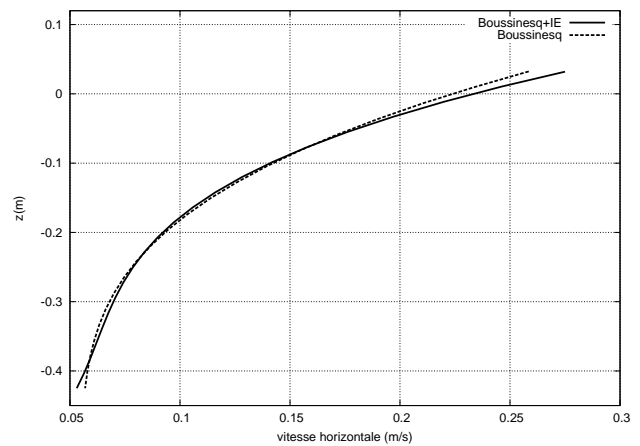
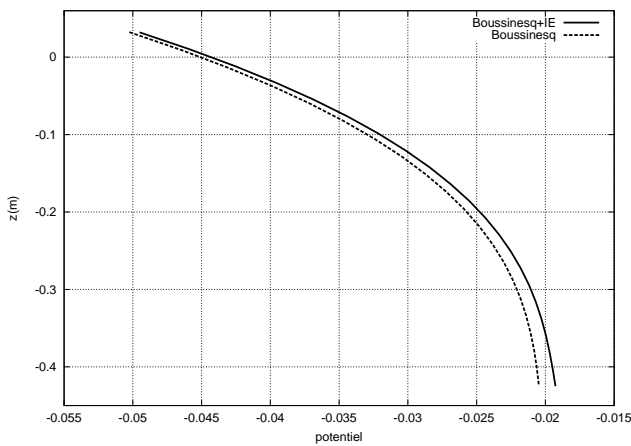


FIG. 4 – Raccordement des potentiels et des vitesses.

La figure 2 présente, au bout de 15 périodes, l'élévation de surface libre le long du domaine, calculée suivant les deux méthodes. Les deux courbes sont confondues. La figure 3 présente, aux deux points de raccordement, les élévations de surface libre au cours du temps suivant les deux calculs. A nouveau les courbes sont confondues. Finalement la figure 4 présente, au même instant des deux simulations, à la frontière gauche, les profils verticaux du potentiel et de la vitesse horizontale.

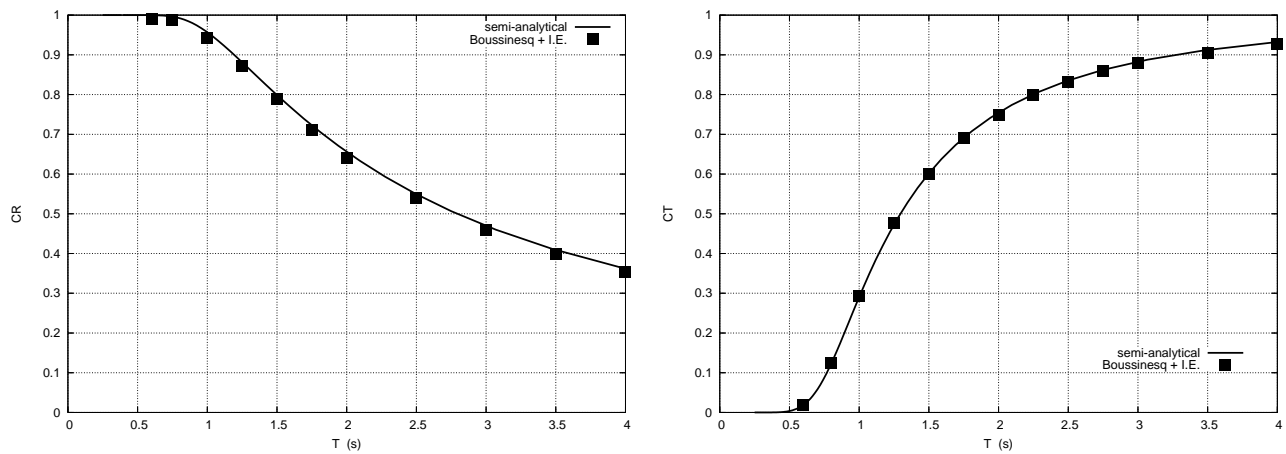


FIG. 5 – Caisson rectangulaire. Coefficients de réflexion (gauche) et de transmission (droite).

### 3.2 Interaction linéaire avec un caisson rectangulaire

On prend une profondeur d'eau de 37.5 cm, avec un caisson rectangulaire, immobile, de longueur 60 cm et de tirant d'eau 11 cm. Ces dimensions correspondent à des essais effectués dans le canal à houle de l'École Centrale de Marseille.

Le caisson, immobile, est soumis à des houles régulières de petite amplitude. Une partie de la houle est transmise, une autre partie est réfléchiée par le caisson. Dans le cadre de la théorie potentielle linéarisée, le problème de diffraction peut être simplement résolu par décomposition du potentiel sur des bases de fonctions propres, dans les trois domaines, en amont du caisson, sous le caisson et en aval du caisson [10].

La figure 5 présente les coefficients de réflexion et de transmission, calculés par le modèle semi-analytique, et tirés des simulations numériques avec une faible amplitude de houle et les conditions de surface libre (1) (2) linéarisées. L'accord est excellent. Ceci prouve que notre méthode de couplage permet à l'information de se propager aussi bien vers l'amont que vers l'aval.

## 4 Conclusion

On a proposé une méthode de couplage entre équations de Boussinesq et équation intégrale. La mise en œuvre réalisée en deux dimensions prouve que la méthode est efficace et robuste. De plus, elle est économique : les simulations réalisées en combinant sous-domaines Boussinesq et équation intégrale sont beaucoup moins coûteuses que l'utilisation de la méthode d'équation intégrale seule.

L'extension à trois dimensions reste à faire.

## Références

- [1] Jamois E. Interaction houle-structure en zone côtière. Thèse, Université Aix-Marseille II, 2005.
- [2] Madsen P., Bingham H., and Liu H. A new boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water. *J. Fluid Mech.*, 462, 1–30, 2002.
- [3] Fuhrman D. and Bingham H. Numerical solution of fully non-linear and highly dispersive boussinesq equations in two horizontal dimensions. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 44, 231–255, 2004.
- [4] Jamois E., Fuhrman D., Bingham H., and Molin B. A numerical study of nonlinear wave run-up on a vertical plate. *Coast. Eng.*, 53, 929–945, 2006.
- [5] Molin B., Remy F., Kimmoun O., and Jamois E. The role of tertiary wave interactions in wave-body problems. *J. Fluid Mech.*, 528, 323–354, 2005.
- [6] Zakharov V. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 9, 190–194, 1968.
- [7] Cointe R. Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle. Thèse, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1989.
- [8] Brebbia C. and Dominguez J. Boundary elements ; an introductory course. WIT Press, Computational Mechanics Publications, 1992.
- [9] Fenton J. The numerical solution of steady water wave problems. *Comput. Geosci.*, 14, 357–368, 1988.
- [10] Cointe R., Geyer P., King B., Molin B., and Tramon M.-P. Nonlinear and linear motions of a rectangular barge in a perfect fluid. *Proceedings of 18th Symposium Naval Hydrodynamics*, Ann Arbor, 1990.